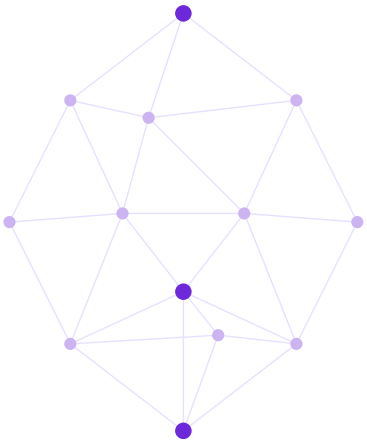
OLIMATECO



OLIMATECO OLÍMPICO
MATERIAL TEÓRICO

PARIDADE

Teoria dos Números

OBMEP Nível 3 · Material Teórico V1

Prof°.: **Jean Lira**

olimateco.com.br @olimateco

Área: Aritmética e Teoria dos Números
Nível de referência: OBMEP Nível 3
Pré-requisitos: números inteiros e operações básicas

Neste material, você aprenderá a...

- reconhecer e representar números pares e ímpares;
- analisar a paridade de operações e expressões;
- usar a paridade para restringir possibilidades;
- demonstrar que determinadas situações são impossíveis;
- reconhecer quando a paridade não fornece informação suficiente.

Sumário

1 O que é paridade? 3

2 Representação de números pares e ímpares 3

3 Paridade nas operações 4

3.1 Adição . . . 5
3.2 Subtração . . . 6
3.3 Multiplicação . . . 7
3.4 Potenciação . . . 8
3.5 E a divisão e a radiciação? . . . 9

4 Paridade de expressões 12

4.1 Determinando a paridade de uma expressão . . . 12
4.2 Expressões cuja paridade independe do valor . . . 13
4.3 Simplificando para enxergar a paridade . . . 14
4.4 Caminho inverso e restrição de possibilidades . . . 14

5 Paridade e impossibilidade 17

5.1 Incompatibilidade de paridades . . . 17
5.2 Equações sem solução por paridade . . . 18
5.3 Operações e transformações impossíveis . . . 19
5.4 Configurações e distribuições impossíveis . . . 21
5.5 Quando a paridade não resolve tudo . . . 22

6 Resumo 23

1 O que é paridade?

A **paridade** de um número inteiro indica se ele é **par** ou **ímpar**.

Um número inteiro é:

- **par**, quando é divisível por 2;
- **ímpar**, quando não é divisível por 2.

Por exemplo, 8 e 26 possuem a mesma paridade, enquanto 8 e 13 possuem paridades diferentes.

Embora seja uma propriedade simples, a paridade é uma ferramenta importante na resolução de problemas, pois permite identificar padrões, restringir possibilidades e demonstrar que determinadas situações são impossíveis.

2 Representação de números pares e ímpares

Observe alguns números pares:

$$8 = 2 \cdot 4, \qquad 14 = 2 \cdot 7, \qquad 26 = 2 \cdot 13.$$

Todos eles podem ser escritos como 2 vezes um número inteiro.

Já para os números ímpares, temos:

$$9 = 2 \cdot 4 + 1, \qquad 15 = 2 \cdot 7 + 1, \qquad 27 = 2 \cdot 13 + 1.$$

Ou seja, um número ímpar pode ser obtido multiplicando um inteiro por 2 e acrescentando 1.

Caso geral

Todo número **par** pode ser escrito na forma

$$2k,$$

e todo número **ímpar** pode ser escrito na forma

$$2k + 1,$$

em que

$$k \in \mathbb{Z}.$$

Por exemplo, se $k = -3$,

$$2k = 2(-3) = -6,$$

que é par, enquanto

$$2k + 1 = 2(-3) + 1 = -5,$$

que é ímpar.

ATENÇÃO

O zero é par.

Se $k = 0$,

$$2k = 2 \cdot 0 = 0.$$

Portanto, **zero é par**, pois pode ser escrito como 2 vezes um número inteiro.

Equivalentemente,

$$0 \div 2 = 0,$$

e a divisão não deixa resto.

Da mesma forma,

$$2k + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1,$$

que é ímpar.

IDEIA-CHAVE

Todo número inteiro é **exatamente um** dos dois: par ou ímpar. Nenhum inteiro pode ser simultaneamente par e ímpar.

Além disso, um inteiro e seu oposto possuem a mesma paridade:

$$n \text{ e } -n$$

são ambos pares ou ambos ímpares.

Por exemplo, 7 e -7 são ímpares, enquanto 12 e -12 são pares. Trocar o sinal de um número não altera sua divisibilidade por 2.

As formas $2k$ e $2k + 1$ serão úteis para justificar as propriedades da paridade sem precisar conhecer os valores dos números envolvidos.

3 Paridade nas operações

Muitas vezes, não precisamos calcular o valor de uma expressão para descobrir algo sobre seu resultado.

Considere, por exemplo,

$$137 + 246.$$

Sem efetuar a adição, já sabemos que o resultado será **ímpar**, pois estamos somando um número ímpar com um número par.

Esse tipo de raciocínio é especialmente útil quando os valores envolvidos são desconhecidos ou quando queremos descobrir **o que é possível ou impossível**, em vez de calcular um valor específico.

Vamos investigar como a paridade se comporta nas principais operações matemáticas.

3.1 Adição

Observe:

$$8 + 14 = 22, \qquad 7 + 12 = 19, \qquad 9 + 15 = 24.$$

Temos:

$$\text{par} + \text{par} = \text{par},$$

$$\text{par} + \text{ímpar} = \text{ímpar},$$

$$\text{ímpar} + \text{ímpar} = \text{par}.$$

Esses resultados valem para quaisquer números inteiros.

Por que essas propriedades funcionam?

Considere dois números pares $2k$ e $2m$:

$$2k + 2m = 2(k + m).$$

Como $k + m$ é inteiro, a soma é par.

Agora considere um número par $2k$ e um número ímpar $2m + 1$:

$$2k + (2m + 1) = 2(k + m) + 1.$$

O resultado é ímpar.

Por fim, para dois números ímpares:

$$(2k + 1) + (2m + 1) = 2(k + m + 1),$$

que é par.

> **IDEIA-CHAVE**
>
> $$\text{par} + \text{par} = \text{par},$$
> $$\text{par} + \text{ímpar} = \text{ímpar},$$
> $$\text{ímpar} + \text{ímpar} = \text{par}.$$

E quando há mais de duas parcelas?

Em uma soma com vários inteiros, as parcelas pares não alteram a paridade da soma.

O que determina o resultado é a **quantidade de parcelas ímpares**:

- quantidade par de parcelas ímpares $\Rightarrow$ soma par;
- quantidade ímpar de parcelas ímpares $\Rightarrow$ soma ímpar.

Por exemplo,

$$12 + 7 + 18 + 5 + 9$$

possui três parcelas ímpares: 7, 5 e 9.

Como três é ímpar, a soma é ímpar, sem que seja necessário calculá-la.

3.2 Subtração

Observe:

$$18 - 6 = 12, \qquad 15 - 8 = 7, \qquad 17 - 9 = 8.$$

Temos:

$$\text{par} - \text{par} = \text{par},$$

$$\text{ímpar} - \text{par} = \text{ímpar},$$

$$\text{ímpar} - \text{ímpar} = \text{par}.$$

Além disso,

$$18 - 7 = 11,$$

logo

$$\text{par} - \text{ímpar} = \text{ímpar}.$$

Por que isso acontece?

Se ambos forem pares,

$$2k - 2m = 2(k - m),$$

que é par.

Se ambos forem ímpares,

$$(2k + 1) - (2m + 1) = 2(k - m),$$

que também é par.

Para um número par menos um ímpar,

$$2k - (2m + 1) = 2(k - m - 1) + 1,$$

que é ímpar.

E para um número ímpar menos um par,

$$(2k + 1) - 2m = 2(k - m) + 1,$$

que também é ímpar.

IDEIA-CHAVE

$$\text{mesma paridade} \Rightarrow \text{diferença par},$$
$$\text{paridades diferentes} \Rightarrow \text{diferença ímpar}.$$

Esse é exatamente o mesmo padrão encontrado na adição.

3.3 Multiplicação

Observe:

$$6 \cdot 8 = 48, \qquad 6 \cdot 7 = 42, \qquad 5 \cdot 9 = 45.$$

Temos:

$$\text{par} \cdot \text{par} = \text{par},$$
$$\text{par} \cdot \text{ímpar} = \text{par},$$
$$\text{ímpar} \cdot \text{ímpar} = \text{ímpar}.$$

IDEIA-CHAVE

Basta um dos fatores ser par para que o produto seja par.

Por que isso acontece?

Para dois números pares,

$$(2k)(2m) = 2(2km),$$

que é par.

Para um par e um ímpar,

$$(2k)(2m+1) = 2\big(k(2m+1)\big),$$

que também é par.

Para dois números ímpares,

$$(2k+1)(2m+1) = 4km + 2k + 2m + 1,$$

ou

$$(2k+1)(2m+1) = 2(2km + k + m) + 1,$$

que é ímpar.

E quando há vários fatores?

A propriedade continua válida:

- se **pelo menos um fator for par**, o produto será par;
- se **todos os fatores forem ímpares**, o produto será ímpar.

Por exemplo,

$$17 \cdot 31 \cdot 46 \cdot 53$$

é par porque 46 é par.

Já

$$15 \cdot 21 \cdot 37 \cdot 51$$

é ímpar porque todos os fatores são ímpares.

Também podemos usar a propriedade no sentido inverso: se um produto de inteiros é ímpar, então todos os seus fatores são ímpares.

3.4 Potenciação

Observe:

$$4^2 = 16, \qquad 6^3 = 216,$$

$$3^2 = 9, \qquad 5^3 = 125.$$

Bases pares produziram resultados pares; bases ímpares produziram resultados ímpares.

Isso ocorre sempre que o expoente é um **inteiro positivo**.

Uma potência pode ser escrita como

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}, \qquad n \geq 1.$$

Se a é par, todos os fatores são pares e a^n é par.

Se a é ímpar, todos os fatores são ímpares e a^n é ímpar.

> **IDEIA-CHAVE**
>
> Para $n \geq 1$, a^n possui a **mesma paridade de** a.

Por exemplo, sem calcular,

$$2026^{137}$$

é par, enquanto

$$2027^{248}$$

é ímpar.

A propriedade também funciona no sentido inverso:

- a^n par $\Rightarrow$ a par;
- a^n ímpar $\Rightarrow$ a ímpar.

> **APROFUNDAMENTO — expoente zero**
>
> Para qualquer $a \neq 0$,
>
> $$a^0 = 1.$$

Como 1 é ímpar, toda potência de base não nula e expoente zero é ímpar. Por exemplo,

$$8^0 = 1 \qquad \text{e} \qquad 7^0 = 1.$$

Portanto, a afirmação de que a potência possui a mesma paridade da base exige a condição $n \geq 1$.

ATENÇÃO

O caso 0^0 é especial e não deve ser tratado pela regra anterior. Em contextos elementares, costuma ser deixado sem definição. Em alguns contextos matemáticos específicos, pode-se adotar convencionalmente o valor 1.

APROFUNDAMENTO — expoentes negativos

Se $a \neq 0$ e n é inteiro positivo,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Em geral, o resultado não é inteiro. Por exemplo,

$$2^{-3} = \frac{1}{8}.$$

Como paridade é uma propriedade dos números inteiros, $\frac{1}{8}$ não é classificado como par ou ímpar.

Existem, porém, exceções. Para $a = 1$, $1^{-n} = 1$, e para $a = -1$, as potências também continuam sendo 1 ou -1. Esses resultados são inteiros e ímpares.

Portanto, não existe uma regra geral de paridade para potências de expoente negativo aplicável a todas as bases inteiras.

3.5 E a divisão e a radiciação?

Divisão e radiciação exigem mais cuidado porque, mesmo quando partimos de números inteiros, o resultado nem sempre é inteiro.

Como a paridade é uma propriedade dos números inteiros, primeiro precisamos verificar se o resultado pertence a $\mathbb{Z}$.

Divisão

Considere:

$$12 \div 4 = 3,$$

que é ímpar, e

$$12 \div 3 = 4,$$

que é par.

Além disso,

$$12 \div 8 = \frac{3}{2},$$

que não é inteiro e, portanto, não possui paridade.

Conhecer apenas a paridade do dividendo e do divisor nem sempre determina a paridade do quociente.

Por exemplo,

$$12 \div 2 = 6$$

e

$$18 \div 2 = 9.$$

Nos dois casos temos par dividido por par, mas os quocientes possuem paridades diferentes.

Divisão por um número ímpar

Existe, entretanto, uma propriedade útil.

Suponha que

$$a = bq,$$

com $a, b, q \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, e b ímpar.

Como multiplicar por um número ímpar preserva a paridade, a e q possuem a mesma paridade.

> **IDEIA-CHAVE**
>
> Quando a divisão é exata, **dividir por um inteiro ímpar preserva a paridade**.

Por exemplo,

$$42 \div 7 = 6$$

e ambos 42 e 6 são pares.

Já

$$45 \div 9 = 5$$

e ambos 45 e 5 são ímpares.

> **ATENÇÃO**
>
> Um inteiro ímpar não pode ser divisível por um inteiro par não nulo. Se $a = bq$ e b fosse par, então bq seria necessariamente par. Assim, um número ímpar não poderia ser igual a esse produto.

Radiciação

Considere:

$$\sqrt{16} = 4, \qquad \sqrt{36} = 6,$$

mas também

$$\sqrt{9} = 3.$$

Além disso,

$$\sqrt{2}$$

não é inteiro e, portanto, não possui paridade.

Quando sabemos que a raiz é inteira, podemos usar a potenciação.

Se

$$\sqrt[n]{a} = b,$$

então

$$b^n = a.$$

Para n inteiro positivo, b^n possui a mesma paridade de b.

Logo, quando a raiz n-ésima é inteira,

$$\sqrt[n]{a}$$

possui a mesma paridade de a.

Por exemplo,

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

e ambos são pares, enquanto

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

e ambos são ímpares.

4 Paridade de expressões

Até agora, estudamos propriedades da paridade.

A partir daqui, começaremos a usá-las como uma **ferramenta de investigação matemática**.

Considere:

$$3n + 5.$$

Se n é ímpar, então $3n$ é ímpar e 5 também é ímpar.

Logo,

$$3n + 5$$

é par.

Em outros casos, podemos descobrir a paridade de uma expressão **sem sequer saber se a variável é par ou ímpar**. A estrutura da própria expressão pode ser suficiente.

4.1 Determinando a paridade de uma expressão

Quando conhecemos a paridade das variáveis, podemos determinar a paridade da expressão analisando cada operação.

Exemplo 4.1.1

Se n é par, qual é a paridade de

$$5n + 3?$$

Como $5n$ é par e 3 é ímpar,

$$\text{par} + \text{ímpar} = \text{ímpar}.$$

Portanto, $5n + 3$ é ímpar.

Exemplo 4.1.2

Se a é ímpar e b é par, determine a paridade de

$$a^2 + ab + b^2.$$

Temos

$$a^2 \text{ ímpar}, \qquad ab \text{ par}, \qquad b^2 \text{ par}.$$

Logo,

$$\text{ímpar} + \text{par} + \text{par} = \text{ímpar}.$$

Portanto, $a^2 + ab + b^2$ é ímpar.

Exemplo 4.1.3

Se m e n são ímpares, qual é a paridade de

$$m^2 + mn + n^2 + 1?$$

Os quatro termos são ímpares. Como temos uma quantidade par de parcelas ímpares, a soma é par.

> **ESTRATÉGIA**
>
> Para analisar uma expressão: (1) identifique a paridade das variáveis conhecidas; (2) determine a paridade de cada parte; (3) combine as propriedades das operações; (4) conclua a paridade da expressão completa.

4.2 Expressões cuja paridade independe do valor

Às vezes podemos determinar a paridade sem conhecer nem o valor nem a paridade da variável.

Exemplo 4.2.1

Considere

$$2n + 5.$$

Independentemente de n, $2n$ é par. Como 5 é ímpar, $2n + 5$ é sempre ímpar.

Exemplo 4.2.2

Considere

$$n(n + 1).$$

Os números n e $n + 1$ são consecutivos. Entre dois inteiros consecutivos, exatamente um é par.

Portanto,

$$n(n + 1)$$

é sempre par.

> **IDEIA-CHAVE**
>
> Entre dois inteiros consecutivos, exatamente um é par. Por isso, $n(n + 1)$ é sempre par.

Como consequência, $n(n + 1) + 1$ é sempre ímpar e $n(n + 1) + 6$ é sempre par.

4.3 Simplificando para enxergar a paridade

Nem sempre a estrutura relevante aparece imediatamente. Uma transformação algébrica simples pode tornar a paridade visível.

Exemplo 4.3.1

Considere

$$n^2 + n.$$

Fatorando,

$$n^2 + n = n(n + 1).$$

Como temos um produto de consecutivos, $n^2 + n$ é sempre par.

Exemplo 4.3.2

Considere

$$n^2 + 3n + 2.$$

Fatorando,

$$n^2 + 3n + 2 = (n + 1)(n + 2).$$

Os fatores são consecutivos. Logo, a expressão é sempre par.

Exemplo 4.3.3

Considere

$$n^2 - n + 4.$$

Podemos reorganizar:

$$n^2 - n + 4 = n(n - 1) + 4.$$

O produto $n(n - 1)$ é par e 4 também é par. Portanto, a expressão é sempre par.

> **ESTRATÉGIA**
>
> Ao estudar a paridade de uma expressão, pode ser útil fatorar, colocar termos em evidência, reorganizar parcelas e procurar inteiros consecutivos. A forma como uma expressão é escrita pode esconder ou revelar informação matemática.

4.4 Caminho inverso e restrição de possibilidades

Também podemos partir da paridade conhecida de uma expressão para descobrir informações sobre os números envolvidos.

Exemplo 4.4.1

Se

$$a + b$$

é ímpar, então a e b possuem paridades diferentes. Um deles é par e o outro é ímpar.

Exemplo 4.4.2

Se

$$ab$$

é ímpar, todos os fatores precisam ser ímpares. Portanto, a e b são ímpares.

> **ATENÇÃO**
>
> Se ab é par, não podemos concluir que ambos são pares. Podemos concluir apenas que **pelo menos um dos fatores é par**.

Exemplo 4.4.3

Suponha que

$$a + b + c$$

seja ímpar.

A soma de três inteiros é ímpar quando existe uma quantidade ímpar de parcelas ímpares.

Portanto, entre a, b, c, existem exatamente 1 ou exatamente 3 números ímpares.

Exemplo guiado 4.4.4

Sabemos que

$$a^2 + ab + b^2$$

é par. O que podemos concluir sobre a e b?

Se tiverem paridades diferentes, uma das parcelas a^2 e b^2 será ímpar, a outra será par e ab será par. A soma será ímpar.

Se ambos forem ímpares,

$$a^2, \qquad ab, \qquad b^2$$

serão todos ímpares. A soma de três ímpares também é ímpar.

Essas possibilidades são incompatíveis com a informação inicial.

Resta apenas: a e b são ambos pares.

Exemplo guiado 4.4.5

Considere inteiros a, b, c tais que

$$ab + bc + ca$$

é ímpar.

Se todos forem pares, a expressão é par.

Se exatamente um for ímpar, todos os produtos são pares.

Se exatamente dois forem ímpares, apenas o produto entre os dois ímpares será ímpar. A soma será ímpar.

Se os três forem ímpares, os três produtos serão ímpares, e a soma também será ímpar.

Portanto, a condição ocorre quando existem exatamente 2 ou exatamente 3 números ímpares.

ESTRATÉGIA

Ao fazer o caminho inverso, pergunte: **O que precisa ser verdade para que o resultado tenha essa paridade?** Nem sempre a informação determina uma única possibilidade. O objetivo pode ser apenas reduzir o conjunto de possibilidades compatíveis com o problema.

5 Paridade e impossibilidade

A paridade também pode mostrar que determinada situação **não pode acontecer**.

Exemplo guiado

Será possível encontrar inteiros m e n tais que

$$m(m+1) + n(n+1) = 2025?$$

Como m e $m+1$ são consecutivos, $m(m+1)$ é par.

Da mesma forma, $n(n+1)$ também é par.

Logo,

$$m(m+1) + n(n+1)$$

é par.

Mas 2025 é ímpar.

Portanto, não existem inteiros m e n que satisfaçam a igualdade.

A impossibilidade foi demonstrada sem procurar valores para m ou n.

5.1 Incompatibilidade de paridades

Uma forma importante de provar impossibilidades é mostrar que duas condições exigiriam paridades incompatíveis.

Exemplo 5.1.1

Existem inteiros a e b tais que

$$a + b = 20$$

e

$$a - b = 7?$$

Como $a + b$ é par, a e b possuem a mesma paridade.

Como $a - b$ é ímpar, deveriam possuir paridades diferentes.

As duas condições não podem ocorrer simultaneamente. Logo, não existem tais inteiros.

Exemplo 5.1.2

Pode existir um inteiro n tal que

$$n^2 + n + 7$$

seja par?

Como

$$n^2 + n = n(n + 1)$$

é sempre par,

$$n^2 + n + 7$$

é sempre ímpar.

Logo, isso é impossível.

Exemplo guiado 5.1.3

Suponha que

$$a + b, \qquad b + c, \qquad c + a$$

sejam todos ímpares.

Como $a + b$ é ímpar, a e b possuem paridades diferentes.

Como $b + c$ é ímpar, b e c também possuem paridades diferentes.

Consequentemente, a e c possuem a mesma paridade.

Então,

$$a + c$$

deveria ser par.

Mas a hipótese exige que seja ímpar.

Portanto, é impossível que as três somas sejam ímpares.

5.2 Equações sem solução por paridade

Na seção anterior, utilizamos incompatibilidades de paridade em diferentes situações. Agora aplicaremos essa estratégia especificamente a equações nas quais procuramos soluções inteiras.

Equações algébricas, geralmente com coeficientes inteiros, nas quais procuramos soluções inteiras são chamadas **equações diofantinas**.

Exemplo 5.2.1

Existem inteiros x e y tais que

$$6x + 4y = 21?$$

Os termos $6x$ e $4y$ são pares. Logo, o lado esquerdo é par.

O lado direito, 21, é ímpar.

Portanto, a equação não possui soluções inteiras.

Exemplo 5.2.2

Considere

$$n^2 + n + 2m = 2025.$$

Como

$$n^2 + n = n(n+1)$$

é par e $2m$ também é par, o lado esquerdo é par.

Como 2025 é ímpar, não existem soluções inteiras.

Exemplo guiado 5.2.3

Será possível encontrar inteiros n e m tais que

$$n^2 + n(n+1) + (n+1)^2 = 2m?$$

Os inteiros n e $n+1$ possuem paridades diferentes. Além disso, $n(n+1)$ é sempre par.

Se n for par, então $n+1$ será ímpar:

$$\text{par} + \text{par} + \text{ímpar} = \text{ímpar}.$$

Se n for ímpar, então $n+1$ será par:

$$\text{ímpar} + \text{par} + \text{par} = \text{ímpar}.$$

Portanto, o lado esquerdo é sempre ímpar.

Já

$$2m$$

é sempre par.

A equação não possui soluções inteiras.

> **ATENÇÃO**
>
> Compatibilidade não garante existência. Considere $x^2 = 3$. Como 3 é ímpar, a paridade permite apenas concluir que, se existisse uma solução inteira, x teria de ser ímpar. Não aparece nenhuma contradição de paridades. Mesmo assim, a equação não possui solução inteira. Portanto, compatibilidade de paridades pode ser necessária sem ser suficiente para garantir a existência de solução.

5.3 Operações e transformações impossíveis

Em alguns problemas, começamos com um número ou configuração e realizamos determinadas operações várias vezes.

Nesses casos, podemos acompanhar a paridade durante o processo.

A pergunta principal é: **O que cada operação faz com a paridade?**

Exemplo 5.3.1

Começamos com

$$7.$$

A cada etapa, podemos somar 4 ou subtrair 6.

É possível chegar a 100?

Somar ou subtrair um número par não altera a paridade.

Como começamos com um número ímpar, todos os valores obtidos serão ímpares.

Como 100 é par, não é possível alcançá-lo.

Exemplo guiado 5.3.2

Começamos com um inteiro ímpar a_0.

A partir dele, construímos uma sequência em que cada novo termo é obtido elevando o termo anterior ao quadrado e somando 2:

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2.$$

Será possível aparecer algum termo par?

Se a_n é ímpar, então a_n^2 também é ímpar.

Somando 2, $a_n^2 + 2$ continua ímpar.

Portanto, sempre que um termo é ímpar, o termo seguinte também é ímpar.

Como a_0 é ímpar, todos os termos serão ímpares. Nenhum número par poderá aparecer.

Exemplo guiado 5.3.3

Começamos com o número 10 e realizamos exatamente 17 operações.

Em cada operação, devemos somar um número inteiro ímpar ao número obtido na etapa anterior.

É possível que, após as 17 operações, o resultado seja par?

Somar um ímpar troca a paridade:

$$\text{par} + \text{ímpar} = \text{ímpar},$$

$$\text{ímpar} + \text{ímpar} = \text{par}.$$

Portanto, a paridade se alterna a cada operação.

Partindo de um número par:

- após 1 operação: ímpar;
- após 2: par;
- após 3: ímpar;

- após 4: par;
- e assim por diante.

Logo,

$$\text{número par de operações} \Rightarrow \text{resultado par},$$
$$\text{número ímpar de operações} \Rightarrow \text{resultado ímpar}.$$

Como 17 é ímpar, após 17 operações o resultado será necessariamente ímpar.

Portanto, não é possível obter um resultado par.

> **ESTRATÉGIA**
>
> Em processos, pergunte: a operação preserva a paridade? Ela troca a paridade? Seu efeito depende da paridade atual? Depois de várias operações, que paridades continuam possíveis?

5.4 Configurações e distribuições impossíveis

A paridade também pode ser usada em distribuições, agrupamentos e configurações.

Exemplo 5.4.1

É possível distribuir 25 objetos em 4 caixas de modo que cada caixa contenha uma quantidade ímpar de objetos?

A soma de quatro números ímpares é par.

Mas 25 é ímpar.

Portanto, essa distribuição é impossível.

Exemplo guiado 5.4.2

Nove números inteiros são colocados em uma tabela 3×3.

É possível que:

- a soma dos números de cada linha seja ímpar;
- a soma dos números de cada coluna seja par?

Somando os números por linhas, a soma total seria

$$\text{ímpar} + \text{ímpar} + \text{ímpar},$$

portanto, ímpar.

Somando os mesmos números por colunas, a soma total seria

$$\text{par} + \text{par} + \text{par},$$

portanto, par.

Mas estamos calculando a mesma soma total.

Ela não pode ser simultaneamente par e ímpar.

Logo, essa configuração é impossível.

Conexão — Contando a mesma coisa de duas maneiras

Em uma reunião, cada pessoa cumprimenta **algumas das outras pessoas, não necessariamente todas**, com um aperto de mão.

Sabe-se que **cada pessoa apertou a mão de um número ímpar de pessoas**.

O que podemos concluir sobre a quantidade de pessoas presentes na reunião?

Suponha que existam n pessoas.

Ao somarmos a quantidade de apertos de mão realizados por todas elas, estamos somando n números ímpares.

Mas cada aperto de mão envolve exatamente duas pessoas. Por isso, ao somarmos os apertos registrados por cada participante, cada aperto é contado exatamente duas vezes.

A soma total é, portanto, par.

A soma de n números ímpares é par somente quando n é par.

Logo, a quantidade de pessoas presentes na reunião deve ser **par**.

Esse raciocínio conecta a paridade a uma ideia importante de Contagem: analisar uma mesma quantidade de maneiras diferentes.

5.5 Quando a paridade não resolve tudo

A paridade fornece apenas uma informação: **o número é par ou ímpar?**

Em muitos problemas isso é suficiente. Em outros, não.

Exemplo 5.5.1

Considere:

$$14, \qquad 20, \qquad 26.$$

Todos são pares.

Do ponto de vista da paridade, estão no mesmo grupo.

Entretanto, se quisermos saber quais são divisíveis por 4, a informação “é par” não basta.

Exemplo 5.5.2

Queremos saber se

$$n^2 + 1$$

pode ser divisível por 4.

Se n é par, n^2 é par e n^2+1 é ímpar.

Se n é ímpar, n^2 é ímpar e n^2+1 é par.

A paridade permite concluir que, para n ímpar, a expressão é par.

Mas isso ainda não responde se ela é divisível por 4.

Por exemplo,

$$1^2+1=2,$$

que é par, mas não é divisível por 4.

O que está faltando?

Quando classificamos um inteiro como par ou ímpar, estamos observando o resto de sua divisão por 2:

- pares deixam resto 0;
- ímpares deixam resto 1.

A paridade distingue apenas dois possíveis restos.

Ao dividir por 3, podemos obter:

$$0, \qquad 1, \qquad 2.$$

Ao dividir por 4:

$$0, \qquad 1, \qquad 2, \qquad 3.$$

Isso permite distinguir números que a paridade coloca no mesmo grupo.

> **IDEIA-CHAVE**
>
> A paridade é um primeiro exemplo de uma ideia mais ampla: **classificar números de acordo com o resto que deixam em uma divisão**.

A paridade, sozinha, não permite resolver completamente a questão sobre n^2+1 e a divisibilidade por 4.

Para isso, precisamos analisar os possíveis restos na divisão por 4.

Essa ideia será desenvolvida no próximo material: **Propriedades dos Restos**.

6 Resumo

Representação

Todo inteiro é exatamente par ou ímpar.

$$\text{par} = 2k, \qquad \text{ímpar} = 2k+1, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

O número 0 é par. Além disso, n e $-n$ possuem a mesma paridade.

Operações

Adição e subtração

	par	ímpar
par	par	ímpar
ímpar	ímpar	par

Em uma soma com várias parcelas:

- quantidade par de parcelas ímpares ⇒ soma par;
- quantidade ímpar de parcelas ímpares ⇒ soma ímpar.

Multiplicação

	par	ímpar
par	par	par
ímpar	par	ímpar

Assim:

- pelo menos um fator par ⇒ produto par;
- todos os fatores ímpares ⇒ produto ímpar.

Potenciação

Para $n \geq 1$, a^n possui a mesma paridade de a.

Estrutura importante

Entre dois inteiros consecutivos, exatamente um é par.

Logo,

$$n(n+1)$$

é sempre par.

Por isso,

$$n^2 + n = n(n+1)$$

também é sempre par.

Caminho inverso

$a + b$ ímpar ⇒ a, b têm paridades diferentes.

ab ímpar ⇒ a, b são ímpares.

ab par ⇒ pelo menos um dos fatores é par.

$a - b$ par $\Rightarrow a, b$ têm a mesma paridade.

Impossibilidade

Se as condições de um problema obrigarem uma mesma quantidade a ser simultaneamente par e ímpar, encontramos uma contradição.

A paridade pode ser usada para analisar:

- equações;
- expressões;
- processos;
- distribuições;
- tabelas;
- contagens;
- configurações.

Checklist estratégico

Ao resolver um problema com números inteiros, pergunte:

1. **A paridade pode fornecer alguma informação?**
2. **Alguma expressão é necessariamente par ou ímpar?**
3. **Existem inteiros consecutivos envolvidos?**
4. **Posso reescrever a expressão para tornar sua paridade mais visível?**
5. **A paridade do resultado permite concluir algo sobre os números envolvidos?**
6. **Alguma possibilidade pode ser eliminada por incompatibilidade de paridades?**
7. **A paridade é suficiente ou preciso de uma informação mais detalhada?**

A habilidade principal não é decorar regras sobre pares e ímpares.

É reconhecer **quando a paridade é a informação certa para observar**.