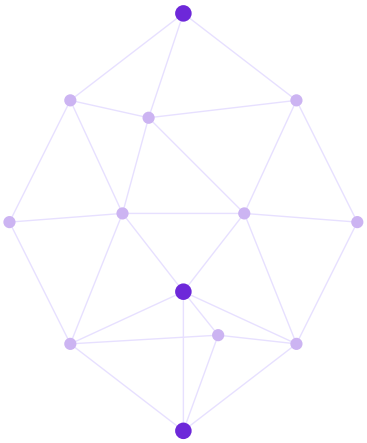
OLIMATECO



OLIMATECO OLÍMPICO
LISTA DE PROBLEMAS

PARIDADE

Aritmética e Teoria dos Números

OBMEP · Nível 3

Prof°.: **Jean Lira**

olimateco.com.br **@olimateco**

Orientação ao aluno

Os problemas desta lista foram escolhidos para explorar diferentes formas de usar a paridade. Em alguns deles, a presença de números pares e ímpares será evidente; em outros, reconhecer que a paridade é a ferramenta adequada fará parte do próprio problema.

Tente cada questão antes de consultar qualquer dica. Uma boa tentativa não precisa terminar com uma solução completa: testar casos, organizar informações e identificar o que permanece igual durante um processo também fazem parte da resolução de problemas.

Entrada

Q01 · (Autoral OLIMATECO)

Considere dois números inteiros a e b, sendo a ímpar e b par.

Sem escolher valores específicos para a e b, determine se cada expressão abaixo é **par ou ímpar**. Justifique sua resposta usando propriedades de paridade.

a) $a^2 + b + 1$

b) $3a + 2b$

c) $a(b + 1)$

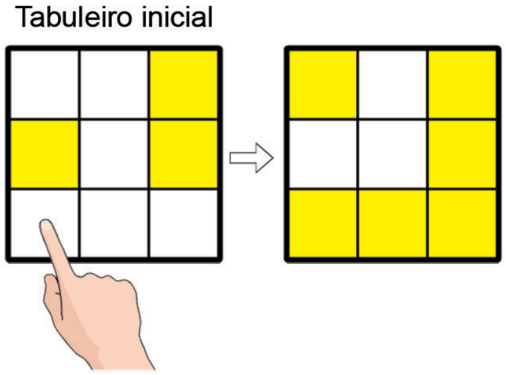
d) $(a + b)(a - b)$

e) $a^2 + ab + b^2 + 1$

f) $a(a + 1) + b(b + 1) + 1$

Q02 · (OBMEP 2016 · 1ª Fase · Nível 1 · Questão 12)

Carlos tem um tabuleiro mágico 3×3 com casas na cor branca ou amarela. Toda vez que ele toca uma casa, ela muda de cor, bem como as demais casas na mesma linha e na mesma coluna, como mostra a figura. A partir do tabuleiro inicial, Carlos tocou no tabuleiro nove vezes, uma vez em cada casa. Após ter feito isto, quantas casas ficaram amarelas?



A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 6 **E)** 9

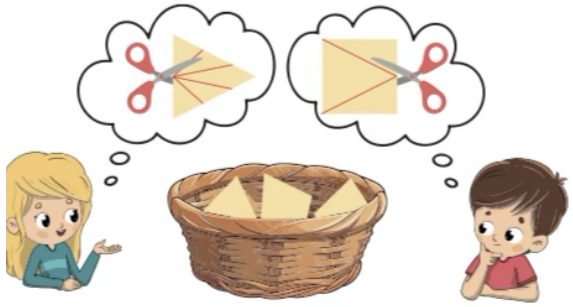
Desenvolvimento

Q03 · (OBMEP 2024 · 2ª Fase · Nível 3 · Questão 1)

Ana e Pedro cortam pedaços de papel que estão em uma cesta.

- Sempre que Ana pega um pedaço, corta em cinco pedaços e devolve todos eles para a cesta.
- Sempre que Pedro pega um pedaço, corta em três pedaços e devolve todos eles para a cesta.

Inicialmente há três pedaços de papel na cesta.



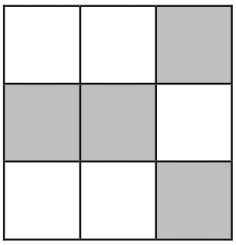
a) Quantos pedaços de papel ficarão na cesta depois de Ana e Pedro pegarem um pedaço cada um e devolverem os pedaços cortados para a cesta?

b) Descreva uma maneira de Ana e Pedro pegarem, cortarem e devolverem todos os pedaços de papel da cesta para que, a partir dos três pedaços iniciais, a cesta fique com 11 pedaços.

c) Explique por que, a partir dos três pedaços iniciais, a cesta nunca ficará com 2024 pedaços após Ana e Pedro devolverem todos os pedaços cortados para a cesta.

Q04 · (OBM 2015 · 1ª Fase · Nível 3 · Questão 1)

Violeta quer numerar de 1 a 9 os quadrados do tabuleiro ao lado, de modo que a soma de dois números em quadrados vizinhos (quadrados com lados comuns) seja um número ímpar. Além disso, ela quer que a soma dos números escritos nos quadrados cinza seja a maior soma possível. Qual é a soma dos números escritos nos quadrados brancos?



A) 15 **B)** 16 **C)** 22 **D)** 29 **E)** 30

Q05 · (British Mathematical Olympiad 2024 · Round 1 · Problem 3)

Rhian e Jack disputam um jogo. Inicialmente está escrito no quadro o número 10^6.

Se o número atual é n, uma jogada consiste em escolher dois inteiros positivos distintos a e b tais que

$$n = ab$$

e substituir n por

$$|a - b|.$$

Rhian faz a primeira jogada e, depois disso, os jogadores se alternam. Um jogador perde quando não existe nenhuma jogada possível.

Determine, com demonstração, qual dos jogadores possui uma estratégia vencedora.

Nota editorial: tradução do inglês para o português por OLIMATECO; sem adaptação matemática.

Desafio

Q06 · (OBM Jr. 1995)

Temos um tabuleiro 1995×1995. Em cada uma de suas casas é escrito um dos números $+1$ ou -1.

A cada linha associamos o produto dos números escritos em suas casas. Fazemos o mesmo para cada coluna.

a) Se T é a soma de todos os números escritos nas casas, de todos os produtos associados às linhas e de todos os produtos associados às colunas, prove que $T \neq 0$.

b) Se S é apenas a soma dos produtos associados às linhas e às colunas, prove que $S \neq 0$.

Procedência: problema atribuído a OBM Jr. 1995 em publicação oficial da OBM.

Precisa de uma pista? As dicas de cada problema estão disponíveis na página desta aula no OLIMATECO.